Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2008/2009

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 30

Aufgabe 1. (6 Punkte)

Sei $C \subset \mathbb{P}^2_K$ eine glatte Quadrik (also eine Kurve vom Grad zwei) über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Zeige, dass es eine Isomorphie der Kurve mit der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_K$ gibt.

Aufgabe 2. (5 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $C \subset \mathbb{P}^2_K$ eine glatte Kurve vom Grad $d \geq 2$. Zeige, dass es einen Morphismus $C \to \mathbb{P}^1_K$ gibt derart, dass jede Faser aus maximal $d-1$ Punkten besteht.

Aufgabe 3. (5 Punkte)

Es sei $C = V_+(X^3+Y^3+Z^3) \subset \mathbb{P}^2_K$ die *Fermat-Kubik* über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik $\neq 3$. Beschreibe explizit einen Morphismus $C \to \mathbb{P}^1_K$, bei dem über jedem Punkt maximal zwei Punkte liegen.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Es sei $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ der komplex-projektive Abschluss des Einheitskreises. Bestimme eine explizite bijektive Parametrisierung $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to C$.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Zeige durch ein Beispiel, dass Lemma 30.2 nicht gilt ohne die Voraussetzung, dass der Körper algebraisch abgeschlossen ist.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Zeige, dass in den in Beispiel 30.6 berechneten Schnittpunkten $\neq (0,0)$ der beiden Kurven ein transversaler Schnitt vorliegt.

Aufgabe 7. (4 Punkte)

Bestätige Satz 30.3 für die beiden Kurven $C = V(ZY^2 - X^3)$ und $D = V(X^2 + (Y-Z)^2 - Z^2)$.

Skizziere die Situation.

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Bestätige Satz 30.3 für die beiden Kurven $C = V(ZY - X^2)$ und $D = V(X^2 + (Y - Z)^2 - Z^2)$.

Skizziere die Situation.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Bestätige Satz 30.3 für die beiden monomialen Kurven, die affin durch $C = V(X^2 - Y^3)$ und $D = V(X^5 - Y^4)$ gegeben sind.

Aufgabe 10. (5 Punkte)

Es seien R ein kommutativer Ring und M, N R-Moduln. Ist $f : M \to N$ ein R-Modulhomomorphismus, so ist $f^* : \operatorname{Hom}(N, R) \to \operatorname{Hom}(M, R)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$, auch ein R-Modulhomomorphismus.

Sei nun $0 \to M \to N \to P \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln.

Zeigen Sie, dass dann die induzierte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(P, R) \longrightarrow \operatorname{Hom}(N, R) \longrightarrow \operatorname{Hom}(M, R)$$

exakt ist. Geben Sie auch ein Beispiel mit $R = \mathbb{Z}$, das zeigt, dass der letzte Pfeil im Allgemeinen nicht surjektiv ist.