Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2008/2009**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 3

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Zeige: Der Durchschnitt von zwei verschiedenen Kreisen in der affinen Ebene ist der Durchschnitt eines Kreises mit einer Geraden.

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Charakterisiere in $\mathbb{Z}$ die Radikale mit Hilfe der Primfaktorzerlegung.

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Zeige, dass ein Ideal $\mathfrak{a}$ in einem kommutativen Ring R genau dann ein Radikal ist, wenn der Restklassenring $R/\mathfrak{a}$ reduziert ist.

Aufgabe 4. (1 Punkt)

Zeige, dass ein Primideal ein Radikal ist.

Aufgabe 5. (2 Punkte)

Seien R und S kommutative Ringe und sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Sei $\mathfrak{a}$ ein Radikal in S. Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{a})$ ein Radikal in R ist.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Sei

$$\varphi : \mathbb{A}_K^n \longrightarrow \mathbb{A}_K^m$$

eine Abbildung, die durch m Polynome in n Variablen gegeben sei. Zeige, dass φ stetig ist bzgl. der Zariski-Topologie.

Aufgabe 7. (2 Punkte)

Man beschreibe eine Abbildung

$$\varphi : \mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^1 ,$$

die bzgl. der Zariski-Topologie stetig ist, die aber nicht durch ein Polynom gegeben ist.

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Es sei K ein unendlicher Körper. Zeige, dass jede nichtleere Zariski-offene Menge $U \subseteq \mathbb{A}_K^n$ dicht ist. Tipp: Induktion über n.