Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2008/2009

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 23

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei N ein R-Modul mit R-Untermoduln $L \subseteq M \subseteq N$. Zeige, dass die Restklassenmoduln durch die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M/L \longrightarrow N/L \longrightarrow N/M \longrightarrow 0$$

miteinander in Beziehung stehen.

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und $P = R[X_1, \ldots, X_m]$ der Polynomring darüber in m Variablen. Es sei $\mathfrak{m} = (X_1, \ldots, X_m)$ das von den Variablen erzeugte Ideal. Zeige, dass $\mathfrak{m}^n = P_{\geq n}$ ist, wobei $P_{\geq n}$ das Ideal in P bezeichnet, das von allen homogenen Polynomen vom Grad $\geq n$ erzeugt wird.

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit zwei Idealen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$. Es sei $S = R/\mathfrak{b}$ und $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}S$ das Bildideal. Zeige, dass $\mathfrak{a}^n S = \tilde{\mathfrak{a}}^n$ ist.

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Berechne für das durch die Erzeuger 4 und 9 gegebene Monoid M die in den Abschätzungen von Lemma 23.6 auftretenden Ausdrücke bis $n \leq 6$.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Berechne für das durch die Erzeuger $5, 8, 11$ gegebene Monoid M die in den Abschätzungen von Lemma 23.6 auftretenden Ausdrücke bis $n \leq 5$.

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Es sei R ein Integritätsbereich mit folgender Eigenschaft: zu je zwei Elementen $f, g \in R$ gelte, dass f ein Teiler von g ist oder dass g ein Teiler von f ist. Es sei R noethersch, aber kein Körper. Zeige, dass R ein diskreter Bewertungsring ist.

In den folgenden Aufgaben wird die Krull-Dimension eines kommutativen Ringes verwendet. Da wir uns hauptsächlich für Kurven interessieren, denen eindimensionale Ringe entsprechen, werden wir keine systematische Dimensionstheorie entwickeln.

Sei R ein kommutativer Ring. Eine Kette aus Primidealen

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n$$

nennt man *Primidealkette der Länge n* (es wird also die Anzahl der Inklusionen gezählt, nicht die Anzahl der beteiligten Primideale). Die *Dimension* (oder *Krulldimension*) von R ist das Supremum über alle Längen von Primidealketten.

Aufgabe 7. (2 Punkte)

Sei R ein Hauptidealbereich, der kein Körper sei. Zeige, dass die Krulldimension von R eins ist.

Aufgabe 8. (5 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $R = K[X, Y]$ der Polynomring in zwei Variablen. Zeige, dass R die Krulldimension zwei besitzt.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Sei R ein noetherscher kommutativer Ring. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) R hat Krulldimension null.
(2) R ist ein artinscher Ring.
(3) R besitzt endlich viele Primideale, die alle maximal sind.
(4) Es gibt eine natürliche Zahl n mit $\mathfrak{m}^n = 0$ für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$.
(5) Die Reduktion von R ist ein Produkt von Körpern.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring von endlicher Krulldimension d. Zeige, dass die Krulldimension des Polynomrings $R[X]$ mindestens $d + 1$ ist. (Bemerkung: über einem noetherschen Grundring erhöht sich die Dimension beim Übergang zum Polynomring genau um eins, dies ist aber schwieriger zu beweisen.)