Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2008/2009**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 22

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Sei K ein Körper der positiven Charakteristik $p > 0$. Bestimme die Menge der Polynome $F \in K[T]$ mit formaler Ableitung $F' = 0$.

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Sei K ein Körper der Charakteristik $p \geq 0$. Man charakterisiere die Polynome $F \in K[X, Y]$ mit der Eigenschaft, dass

(1) die erste partielle Ableitung
(2) die zweite partielle Ableitung
(3) beide partiellen Ableitungen

null sind.

Aufgabe 3. (2 Punkte)

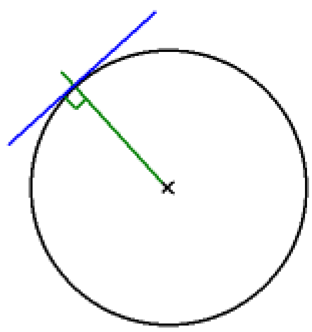
Sei K ein Körper und $F \in K[X, Y]$ ein nichtkonstantes Polynom mit einfachen Primfaktoren und mit zugehöriger ebener Kurve $C = V(F)$. Zeige, dass C nur endlich viele singuläre Punkte besitzt.

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $G, H \in K[X, Y]$ Polynome mit $G(P) = H(P) = 0$ für einen bestimmten Punkt $P \in \mathbb{A}^2_K$. Es sei $F = GH$. Zeige, dass jede Tangente von G in P und jede Tangente von H in P auch eine Tangente von F in P ist.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Beweise Lemma 22.11.



Aufgabe 6. (3 Punkte)

Zeige, dass der Einheitskreis über einem Körper der Charakteristik $\neq 2$ glatt ist und bestimme für jeden Punkt die Gleichung der Tangente.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Sei K ein Körper.

a) Zeige, dass der Graph eines Polynoms $F \in K[X]$ eine glatte algebraische Kurve ist.

b) Seien $F, G \in K[X]$ Polynome ohne gemeinsame Nullstelle. Zeige, dass der Graph der rationalen Funktion F/G ebenfalls eine glatte algebraische Kurve ist.

Aufgabe 8. (6 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Betrachte die Kurve

$$C = V(x^3 + 5x^2y - 6xy^2 - x^2 - xy + 4y^2)\,.$$

(1) Bestimme die Tangenten im Nullpunkt.
(2) Zeige, dass $P = (1,2)$ ein Punkt der Kurve ist, und berechne die Tangente(n) von C in P über die Ableitung.
(3) Führe eine Variablentransformation durch derart, dass P in den neuen Variablen der Nullpunkt ist, und bestimme die Tangente(n) in P aus der transformierten Kurvengleichung.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Bestimme für die algebraische Kurve

$$C = V(9y^4 + 10x^2y^2 + x^4 - 12y^3 - 12x^2y + 4y^2)$$

die Singularitäten sowie deren Multiplizität und Tangenten (vergleiche Beispiel 8.5).

Aufgabe 10. (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Eine *Potenzreihe in einer Variablen* über K ist ein formaler Ausdruck der Form

$$a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3 + \ldots \text{ mit } a_i \in K\,.$$

Es kann hier also unendlich viele von null verschiedene Koeffizienten a_i geben. Definiere eine Ringstruktur auf der Menge aller Potenzreihen, die die Ringstruktur auf dem Polynomring in einer Variablen fortsetzt. Zeige, dass dieser Ring ein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 11. (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein noetherscher abstrakter Bewertungsring schon diskret ist.