Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2008/2009**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 20

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Sei R ein normaler Integritätsbereich und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass dann auch die Nenneraufnahme R_S normal ist.

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $R_i \subseteq K$, $i \in I$, eine Familie von normalen Unterringen. Zeige, dass dann auch der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} R_i$ normal ist.

Aufgabe 3. (1 Punkt)

Sei R ein Integritätsbereich. Zeige, dass R genau dann normal ist, wenn er mit seiner Normalisierung übereinstimmt.

Aufgabe 4. (2 Punkte)

Sei R ein Integritätsbereich. Sei angenommen, dass die Normalisierung von R gleich dem Quotientenkörper $Q(R)$ ist. Zeige, dass dann R selbst schon ein Körper ist.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Sei R ein normaler Integritätsbereich und $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung. Sei $f \in R$. Zeige, dass für das von f erzeugte Hauptideal gilt:

$$R \cap (f)S = (f)R\,.$$

Aufgabe 6. (6 Punkte)

Sei R ein normaler Integritätsbereich. Zeige, dass dann auch der Polynomring $R[X]$ normal ist.

Aufgabe 7. (5 Punkte)

Sei R ein normaler Integritätsbereich und $a \in R$. Es sei vorausgesetzt, dass a keine Quadratwurzel in R besitzt. Zeige, dass das Polynom $X^2 - a$ prim in $R[X]$ ist. Tipp: Verwende den Quotientenkörper $Q(R)$. Warnung: prim muss hier nicht äquivalent zu irreduzibel sein.

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Sei R ein Integritätsbereich. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) R ist normal
(2) Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ ist die Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$ normal.
(3) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ ist die Lokalisierung $R_{\mathfrak{m}}$ normal.

(Man sagt dann, dass normal eine *lokale Eigenschaft* ist.)

Aufgabe 9. (2 Punkte)

Sei M ein torsionsfreies Monoid. Zeige, dass dann auch die Differenzgruppe $\Gamma(M)$ torsionsfrei ist.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Sei M ein kommutative Gruppe. Zeige, dass die Torsionsfreiheit von M äquivalent zu folgender Eigenschaft ist: Aus $m \in M$ und $rm = 0$ für ein positives $r \in \mathbb{N}$ folgt stets $m = 0$ (mit dieser Eigenschaft wird üblicherweise die Torsionsfreiheit einer Gruppe definiert). Zeige ferner, dass diese Äquivalenz für ein Monoid nicht gelten muss.

Aufgabe 11. (2 Punkte)

Sei $M \subseteq \Gamma(M) \cong \mathbb{Z}^n$ ein Monoid und betrachte die Menge

$$M^* = \{\varphi : \Gamma(M) \longrightarrow \mathbb{Z} : \varphi(M) \subseteq \mathbb{N}\} .$$

Zeige, dass M^* ein normales Untermonoid von $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ ist (dieses Monoid nennt man das *duale Monoid* zu M).

Aufgabe 12. (3 Punkte)

Betrachte Beispiel 20.11. Welchen Wert haben die drei Erzeuger unter den dort angegebenen Monoidhomomorphismen φ_1, φ_2 nach $\mathbb{Z}$, durch die das Monoid beschrieben werden kann. Bestimme den Kokern des Gruppenhomomorphismus

$$\Gamma(M) \longrightarrow \mathbb{Z}^2,\ m \longmapsto (\varphi_1(m), \varphi_2(m)) .$$

(Diesen Kokern nennt man auch die *Divisorenklassengruppe* des Monoidringes.)