

Algebraische Kurven**Arbeitsblatt 18****Aufgabe 1.** (2 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring. Beweise die R -Algebra-Isomorphie

$$R[\mathbb{Z}^n] \cong R[X_1, \dots, X_n]_{X_1 \cdots X_n}$$

mit Hilfe der universellen Eigenschaften von Monoidringen und Nenneraufnahmen.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Sei M ein kommutatives Monoid. Definiere eine Bijektion zwischen den folgenden Objekten.

- (1) Filter in M .
- (2) $\text{Mor}_{\text{mon}}(M, (\{0, 1\}, 1, \cdot))$.
- (3) $\mathbb{F}_2 - \text{Spek}(M)$
- (4) $\{\varphi \in K - \text{Spek}(K[M]) : \varphi(M) \subseteq \{0, 1\}\}$. (Dabei ist K ein Körper.)

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Sei M ein kommutatives Monoid. Zeige, dass es in M einen kleinsten Filter gibt und dass dieser eine Gruppe bildet.

Aufgabe 4. (2 Punkte)

Sei M ein numerisches Monoid. Bestimme die Filter in M .

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Es sei M ein numerisches Monoid, das durch zwei teilerfremde Elemente $d > e$ erzeugt werde. Bestimme die Einbettungsdimension, die Multiplizität, die Führerzahl und den Singularitätsgrad von M .

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Bestimme für das numerische Monoid M , das durch 5, 7 und 9 erzeugt wird, die Einbettungsdimension, die Multiplizität, die Führerzahl und den Singularitätsgrad.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Bestimme für das numerische Monoid M , das durch 3, 7, 9 und 11 erzeugt wird, die Einbettungsdimension, die Multiplizität, die Führerzahl und den Singularitätsgrad.

Aufgabe 8. (2 Punkte)

Seien M, N endlich erzeugte kommutative Monoide mit den K -Spektren $K\text{-Spek}(K[M]) = \text{Mor}_{\text{mon}}(M, K)$ und $K\text{-Spek}(K[N]) = \text{Mor}_{\text{mon}}(N, K)$. Zeige, dass man für einen Monoidhomomorphismus $\varphi : M \rightarrow N$ die zugehörige Spektrumsabbildung auf zwei verschiedene Weisen definieren kann, die aber inhaltlich übereinstimmen.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien M, N numerische Monoide mit $M \subseteq N$. Zeige, dass die zugehörige Spektrumsabbildung surjektiv ist. Es ist dabei hilfreich, die Aussage 18.10 zu verwenden.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Seien M, N numerische Monoide. Für welche der numerischen Invarianten ν (Multiplizität, Führerzahl, Singularitätsgrad, Einbettungsdimension) folgt aus $M \subseteq N$ die Abschätzung $\nu(M) \geq \nu(N)$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 11. (3 Punkte)

Sei M ein numerisches Monoid, das nicht isomorph zu \mathbb{N} sei, und sei K ein Körper. Zeige, dass es im Monoidring $K[M]$ irreduzible Elemente gibt, die nicht prim sind. Gebe Elemente aus $K[M]$ mit zwei wesentlich verschiedenen Zerlegungen in irreduzible Elemente an.