Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2008/2009**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 14

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei $e \in R$ ein idempotentes Element. Zeige, dass es eine natürliche Isomorphie

$$R_e \cong R/(1-e)$$

gibt. (Dies zeigt erneut, dass $D(e)$ offen und abgeschlossen ist.)

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und betrachte die affine Ebene $\mathbb{A}^2_K$. Es sei $P \in \mathbb{A}^2_K$ ein Punkt und $U = \mathbb{A}^2_K - \{P\}$ das offene Komplement davon. Zeige

$$\Gamma(U, \mathcal{O}) = K[X, Y] \, .$$

(Dies besagt, dass eine außerhalb eines Punktes definierte algebraische Funktion sich in den Punkt fortsetzen lässt. In der komplexen Analysis nennt man den entsprechenden Satz den *Riemannschen Hebbarkeitssatz.*)

Aufgabe 3. (5 Punkte)

Beschreibe die Menge M aller 2×3-Matritzen mit Rang ≤ 1 über einem Körper K als K-Spektrum einer geeigneten K-Algebra. Zeige, dass es eine Isomorphie zwischen einer (nicht leeren) Zariski-offenen Teilmenge von M und einer offenen Menge des $\mathbb{A}^4_K$ gibt.

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper der Charakteristik null. Wir betrachten den Schnitt von einem Zylinder und einer Kugel, und zwar

$$C = V(X^2 + Y^2 - 1) \cap V((X-3)^2 + Y^2 + Z^2 - 7) \subseteq \mathbb{A}^3_K \, .$$

Zeige, dass man den Koordinatenring von C schreiben kann als Restklassenring eines Polynomrings in zwei Variablen.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Betrachte das Ideal

$$\mathfrak{a} = (U^5 - V^3, U^{11} - W^3, V^{11} - W^5) \subseteq K[U, V, W]$$

und das zugehörige Nullstellengebilde $Z = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^3_K$. Zeige, dass $W - U^2V$ zum Radikal von $\mathfrak{a}$ gehört. Zeige damit, dass Z isomorph zu einer ebenen algebraischen Kurve ist.

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring und M_i, $i \in \mathbb{N}$, seien R-Moduln mit fixierten R- Modulhomomorphismen $\varphi_i : M_i \to M_{i+1}$. Die Sequenz

$$\ldots \longrightarrow M_i \longrightarrow M_{i+1} \longrightarrow M_{i+2} \longrightarrow M_{i+3} \longrightarrow \ldots$$

heißt *exakt*, wenn für alle i gilt, dass $\operatorname{Kern}(\varphi_i) = \operatorname{Bild}(\varphi_{i-1})$ ist.

(1) Zeigen Sie, dass diese Definition im Falle einer kurzen exakten Sequenz mit der Definition in der Vorlesung übereinstimmt.
(2) Sei nun $R = K$ ein Körper, die M_i seien endlich erzeugt und alle $M_i = 0$ für $i \geq n$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim_K M_i = 0\,.$$

Aufgabe 7. (6 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring. Beweisen sie die Äquivalenz folgender Aussagen.

(1) R ist reduziert
(2) Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ ist $R_{\mathfrak{p}}$ reduziert.
(3) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ ist $R_{\mathfrak{m}}$ reduziert.

Bemerkung: Man sagt dann auch, dass Reduziertheit eine lokale Eigenschaft ist.

Geben sie ein Beispiel für einen kommutativen Ring, der nicht integer ist, dessen Lokalisierungen an Primidealen aber alle integer sind.

Aufgabe 8. (6 Punkte)

Es sei K ein Körper und A eine endlichdimensionale, reduzierte K-Algebra. Zeigen Sie, dass dann A ein endliches direktes Produkt von endlichen Körpererweiterungen von K ist. Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass es in A nur endlich viele Primideale gibt.

In den folgenden Aufgaben werden Ultrafilter und minimale Primideale besprochen. Wir geben die Definitionen.

Ein Primideal $\mathfrak{p}$ in einem kommutativen Ring heißt *minimales Primideal*, wenn es kein Primideal $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ gibt.

Sei R ein kommutativer Ring. Ein multiplikatives System $F \subseteq R$ nennt man einen *Ultrafilter*, wenn $0 \notin F$ ist und wenn F maximal mit dieser Eigenschaft ist.

Aufgabe 9. (3 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei S ein multiplikatives System mit $0 \notin S$. Zeige, dass S in einem Ultrafilter enthalten ist. (Man benutze das Lemma von Zorn.)

Aufgabe 10. (2 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei $F \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass F genau dann ein Ultrafilter ist, wenn es zu jedem $g \in R$, $g \notin F$, ein $f \in F$ und eine natürliche Zahl n gibt mit $fg^n = 0$.

Aufgabe 11. (2 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei $F \subset R$ ein Ultrafilter. Zeige, dass das Komplement von F ein minimales Primideal in R ist.

Aufgabe 12. (3 Punkte)

Sei R ein kommutativer, reduzierter Ring. Zeigen Sie, dass jeder Nullteiler in einem minimalen Primideal enthalten ist.

Aufgabe 13. (3 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei R eine kommutative K-Algebra von endlichem Typ. Zeige, dass die minimalen Primideale von R den irreduziblen Komponenten von $K-\operatorname{Spek}(R)$ entsprechen.