Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2008/2009**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 13

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei R eine reduzierte K-Algebra von endlichem Typ. Beweise den *Identitätssatz* in der folgenden Gestalt: Wenn für $f, g \in R$ gilt, dass $f(P) = g(P)$ ist für alle $P \in K-\operatorname{Spek}(R)$, so ist $f = g$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Man definiert die *Nenneraufnahme*

$$R_S$$

schrittweise wie folgt. Es sei zunächst M die Menge der formalen Brüche mit Nenner in S, also

$$M = \{\frac{r}{s},\, r \in R,\, s \in S\}\,.$$

Zeige, dass durch

$$\frac{r}{s} \sim \frac{r'}{s'} \text{ genau dann, wenn es ein } t \in S \text{ gibt mit } trs' = tr's$$

eine Äquivalenzrelation auf M definiert ist. Wir bezeichnen mit R_S die Menge der Äquivalenzklassen. Definiere auf R_S eine Ringstruktur und definiere einen Ringhomomorphismus $R \to R_S$.

In den folgenden Aufgaben dürfen Sie, wenn Sie wollen, bei Nenneraufnahmen annehmen, dass Integritätsbereiche vorliegen.

Aufgabe 3. (3 Punkte)

Seien R und A kommutative Ringe und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Es sei $\varphi : R \to A$ ein Ringhomomorphismus derart, dass $\varphi(s)$ eine Einheit in A ist für alle $s \in S$. Zeige: dann gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus

$$\tilde{\varphi} : R_S \longrightarrow A\,,$$

der φ fortsetzt.

Die folgende Aufgabe verwendet den Begriff des saturierten multiplikativen Systems.

Ein multiplikatives System S in einem kommutativen Ring R heißt *saturiert*, wenn folgendes gilt: Ist $g \in R$ und gibt es ein $f \in S$, das von g geteilt wird, so ist auch $g \in S$.

Aufgabe 4. (2 Punkte)

Seien A, B kommutative Ringe und sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(B^\times)$ der Einheitengruppe ein saturiertes multiplikatives System in A ist.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien R und S kommutative K-Algebren von endlichem Typ. Es sei $f \in R$ und $\varphi : R \to S$ sei ein K-Algebra-Homomorphismus. Zeige, dass die Spektrumsabbildung φ^* genau dann durch $D(f)$ faktorisiert, wenn $\varphi(f)$ eine Einheit in S ist.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei $f \in R$ mit zugehöriger Nenneraufnahme R_f. Beweise die R-Algebra-Isomorphie

$$R_f \cong R[T]/(Tf - 1)\,.$$

Aufgabe 7. (4 Punkte)

Betrachte zwei parallele Geraden V und das Achsenkreuz W. Beschreibe eine möglichst natürliche surjektive Abbildung zwischen V und W (in welche Richtung?), und zwar sowohl geometrisch als auch algebraisch. Gibt es auch eine surjektive polynomiale Abbildung in die andere Richtung?

Aufgabe 8. (6 Punkte)

Betrachte die durch $Y^2 = X^3 + X^2$ gegebene Kurve C (siehe Beispiel 6.3) und die offene Menge $U = D(X) \subseteq C$. Finde eine abgeschlossene Realisierung von U in $\mathbb{A}^3_K$ und zeige, dass es auch eine solche Realisierung in $\mathbb{A}^2_K$ gibt. Skizziere die Bildkurve unter der Abbildung

$$U \longrightarrow \mathbb{A}^2_K,\ (x, y) \longmapsto \left(\frac{1}{x}, y\right).$$

Ist U isomorph zu einer offenen Menge der affinen Geraden?

Aufgabe 9. (1 Punkt)

Zeige, dass ein Integritätsbereich ein zusammenhängender Ring ist.

Aufgabe 10. (1 Punkt)

Sei R ein kommutativer Ring und sei $f \in R$. Es sei f sowohl nilpotent als auch idempotent. Zeige, dass $f = 0$ ist.

Aufgabe 11. (1 Punkt)

Seien R und S kommutative Ringe und sei $R \times S$ der Produktring $R \times S$. Zeige, dass die Teilmenge $R \times 0$ ein Hauptideal ist.

Aufgabe 12. (2 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum, der nicht leer und nicht zusammenhängend sei. Zeige, dass es dann eine stetige Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$, $f \neq 0, 1$, ($\mathbb{R}$ sei mit der metrischen Topologie versehen) gibt, die idempotent im Ring der stetigen Funktionen auf X ist.

Aufgabe 13. (3 Punkte)

Bestimme die nilpotenten und die idempotenten Elemente in $\mathbb{Z}/(175)$.

Aufgabe 14. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und betrachte den Durchschnitt der beiden algebraischen Kurven

$$V(X^2 + Y^2 - 1) \text{ und } V(Y - X^2)\,.$$

Identifiziere den Restklassenring

$$R = K[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1, Y - X^2)$$

mit einem Produktring und beschreibe die Restklassenabbildung $K[X, Y] \to R$ mittels dieser Identifizierung. Bestimme Urbilder in $K[X, Y]$ für sämtliche idempotenten Elemente des Produktringes.

Aufgabe 15. (5 Punkte)

Sei K ein Körper und seien $P_1, \ldots, P_n$ endlich viele Punkte in der affinen Ebene $\mathbb{A}^2_K$. Es seien $a_1, \ldots, a_n \in K$ beliebig vorgegebene Werte. Zeige, dass es ein Polynom $F \in K[X, Y]$ gibt mit $F(P_i) = a_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.