Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2008/2009**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 12

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Zeige, dass die Zariski-Topologie auf dem K-Spektrum einer endlich erzeugten kommutativen K-Algebra R wirklich eine Topologie ist.

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Seien R, S, T drei kommutative K-Algebren von endlichem Typ und $\varphi : R \rightarrow S$ und $\psi : S \rightarrow T$ seien K-Algebra-Homomorphismen. Man zeige, dass für die zugehörigen Spektrumsabbildungen gilt

$$(\psi \circ \varphi)^* = (\varphi^*) \circ (\psi^*) .$$

Ferner zeige man, dass zur Identität $\mathrm{id} : R \rightarrow R$ auch id^* die Identität ist.

Aufgabe 3. (1 Punkt)

Man beschreibe zu einer kommutativen K-Algebra R von endlichem Typ die Spektrumsabbildung, die zum Strukturhomomorphismus der Algebra gehört.

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel von zwei kommutativen K-Algebren R, S von endlichem Typ und einer stetigen Abbildung zwischen den zugehörigen K-Spektren, die nicht von einem K-Algebra-Homomorphismus herrühren kann.

Aufgabe 5. (1 Punkt)

Sei R eine kommutative K-Algebra von endlichem Typ. Zeige, dass für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ in $K - \operatorname{Spek}(R)$ die Gleichheit

$$V(\mathfrak{a}) = V(\operatorname{rad}(\mathfrak{a}))$$

gilt.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Sei K ein Körper und R eine kommutative K-Algebra von endlichem Typ, und sei $F \in R$. Es sei

$$\varphi^* : K - \operatorname{Spek}(R) \longrightarrow \mathbb{A}^1_K$$

die zum Einsetzungshomomorphismus gehörende Spektrumsabildung. Zeige, dass

$$(\varphi^*)^{-1}(0) = V(F)$$

ist.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Sei K ein Körper und R eine kommutative K-Algebra von endlichem Typ, und sei $F \in R$. Es sei

$$\varphi^* : K - \operatorname{Spek}(R) \longrightarrow \mathbb{A}^1_K$$

die zum Einsetzungshomomorphismus gehörende Spektrumsabildung. Zeige, dass F konstant ist genau dann, wenn φ^* konstant ist. Man mache sich dabei die unterschiedliche Bedeutung von „konstant“ klar.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Sei K ein Körper und sei R eine kommutative K- Algebra von endlichem Typ mit der Reduktion $S = R_{\text{red}}$. Zeige, dass es eine natürliche Homöomorphie

$$K - \operatorname{Spek}(R) \cong K - \operatorname{Spek}(S)$$

gibt.

Aufgabe 9. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel von zwei integren K-Algebren von endlichem Typ R und S und einem K-Algebra-Homomorphismus $\varphi : R \to S$, der kein Ringisomorphismus ist, wo aber die induzierte Spektrumsabbildung $\varphi^* : K - \operatorname{Spek}(S) \longrightarrow K - \operatorname{Spek}(R)$ ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 10. (4 Punkte)

Sei R ein noetherscher Integritätsbereich. Zeige, dass sich jedes Element aus R schreiben lässt als ein Produkt von irreduziblen Elementen.

Aufgabe 11. (6 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik null. Es sei eine polynomiale Abbildung der Form

$$\varphi : \mathbb{A}^1_K \longrightarrow \mathbb{A}^2_K,\ t \longmapsto (t^2, \psi(t))$$

gegeben (mit $\psi(t) \in K[t]$) Zeige, dass φ genau dann injektiv ist, wenn ψ die Form hat

$$\psi(t) = at^n + \theta(t)$$

mit $a \neq 0$, n ungerade und $\theta(t)$ ein Polynom, wo alle Exponenten geradzahlig sind.