Universität Osnabrück
Vorlesung *Algebraische Kurven* 2008
Prof. Dr. Holger Brenner
Arbeitsblatt 1

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Multipliziere in $\mathbb{Z}[x,y,z]$ die beiden Polynome
$$x^5+3x^2y^2-xyz^3 \text{ und } 2x^3yz+z^2+5xy^2z-x^2y\,.$$

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Multipliziere in $\mathbb{Z}/(5)[x,y]$ die beiden Polynome
$$x^4+2x^2y^2-xy^3+2y^3 \text{ und } x^4y+4x^2y+3xy^2-x^2y^2+2y^2\,.$$

Aufgabe 3. (3 Punkte)

Sei R ein Integritätsbereich und $R[X]$ der Polynomring über R. Zeige, dass die Einheiten von $R[X]$ genau die Einheiten von R sind. Zeige auch, dass diese Aussage nicht für beliebige kommutative Ringe gilt.

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Führen Sie in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ folgende Polynomdivision aus.
$$X^4+5X^2+3 \text{ durch } 2X^2+X+6\,.$$

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Bestimme im Polynomring $\mathbb{Z}/(3)\ [X]$ alle irreduziblen Polynome vom Grad 4.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Sei K ein Körper. Zeige, dass folgende beide Eigenschaften äquivalent sind:

(1) K ist algebraisch abgeschlossen.
(2) Jedes nicht-konstante Polynom $F \in K[X]$ zerfällt in Linearfaktoren.

Aufgabe 7. (2 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass K nicht endlich sein kann.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = 1$$

für die Körper $K = \mathbb{Z}/(2)$, $\mathbb{Z}/(5)$ und $\mathbb{Z}/(11)$.